

# Determinación de los parámetros del tránsito de Mercurio de 2019 con el programa informático CECI

LUIS G. LÓPEZ<sup>1</sup>

Observatorio

Colegio Nacional de Buenos Aires

<sup>1</sup>llopez@cnba.uba.ar

23 de diciembre de 2019

## RESUMEN

El tránsito de Mercurio del 11 de Noviembre de 2019 fue fotografiado en nuestro Observatorio y analizado con un programa informático desarrollado específicamente para el mismo, mediante técnicas de reconocimiento de bordes en imágenes. La robustez del método superó la prueba de fotografías obtenidas en condiciones meteorológicas diversas y adversas.

## I. INTRODUCCIÓN

**E**EL 11 DE noviembre de 2019 el planeta Mercurio presentó su conjunción inferior a escasa distancia de uno de los nodos de su plano orbital con respecto a la eclíptica. Esa práctica coincidencia de índole geométrica pudo ser apreciada desde la Tierra como el pasaje de Mercurio por delante del Sol, fenómeno que se conoce con el nombre de tránsito.

Parte de la delicada belleza del tránsito de Mercurio se debe a la baja frecuencia con que ocurre; se calcula que por siglo sólo hay 13 o 14 de estos sucesos [NASA Transits]. Se debe también, quizá, a la pequeñez de la oscura mancha que su sección transversal ocupa en relación al Sol: cuesta distinguir ese puntito que nos cuentan que es Mercurio contra la imponente y radiante superficie solar. No puede dejar de conmovernos, asimismo, recordar que uno de los primeros y más rotundos éxitos de las leyes de Kepler fue la predicción del tránsito de Mercurio de 1631 que el mismo Kepler calculó, y en cuya corroboración observacional no pudo participar porque ya había muerto

[Thorvaldsen 2013]. Y cómo no sentirse inspirados y agradecidos a esos astrónomos heroicos que en los siglos XVII y XVIII se aventuraron a los confines del mundo para medir el tamaño del sistema solar relacionando la duración de los tránsitos de Mercurio y Venus vistos desde distintas latitudes [Hughes 2001].

En el presente trabajo procuramos determinar algunos de los parámetros vinculados al desarrollo del tránsito: los instantes de los cuatro contactos con el limbo solar<sup>1</sup>, el instante de su máximo, y la menor distancia aparente entre los centros del Sol y Mercurio. Para lograrlo, en primer lugar, obtuvimos fotografías del tránsito. Luego, mediante un programa informático bautizado CECI<sup>2</sup>, desarrollado por el autor y escrito en Common Lisp, se obtuvieron las distancias entre los centros de las imágenes de ambos astros y sus radios aparentes a lo lar-

<sup>1</sup>Llámense 1.er, 2.do, 3.er y 4.to contacto, respectivamente, a los instantes en que Mercurio i) inicia su tránsito por delante del Sol, ii) ingresa totalmente, iii) comienza a salir y iv) emerge definitivamente, dando por finalizado el tránsito.

<sup>2</sup>CECI: calculador exhaustivo de circunferencias iterativo.

go del tiempo. Con esta información, se utilizó el programa GNUPLOT [GNUPLOT] para ajustar una curva que vinculara de la mejor manera posible el tiempo con los valores que esta distancia adoptaba. De esa manera, el instante del máximo se derivó inmediatamente del mínimo de la curva, los del primer y cuarto contacto con las intersecciones de la misma y el valor sumado de los radios solar y de Mercurio, y los del segundo y tercer contacto con las intersecciones de dicha curva y la diferencia entre los valores de estos radios. Asimismo, el instante del máximo permitió calcular la distancia mínima relativa entre los centros.

## II. MÉTODO EXPERIMENTAL

SE EMPLEÓ EL telescopio MEADE SCT f/10 de 30 cm de apertura del Observatorio, provisto de un filtro solar de apertura completa, y una cámara CANON T5i SLR con un sensor de 5184x3456 pixeles. La sensibilidad usada fue ISO 200 y el tiempo de exposición de 1/5 seg. para todas las fotografías. La cámara fue sincronizada con el servicio de <https://time.is/es/>. La sincronización se hizo "a mano", ingresando en la configuración de la hora de la cámara y tratando de hacerla coincidir con la que la página *web* indicaba. El autor confía en haber logrado una precisión mejor que 1 segundo.

La intención era tomar una fotografía cada 12 segundos (si bien durante el inicio la frecuencia empleada fue mayor); para eso se usó el CANONMATIC, artilugio diseñado tiempo atrás por el autor en base a un microprocesador ARDUINO. Las condiciones meteorológicas provocaron que el proceso se interrumpiera por momentos, hasta que hacia las 13:20 (cerca de 1h 30m antes de la finalización del tránsito) la nubosidad obligó a concluir con la adquisición de las fotografías.

En una primera selección (un tanto optimista) 989 fotos fueron escogidas como dignas de ser procesadas. Enfrentadas a CECI, sólo 893 pudieron ser incluidas en el análisis.

La elección del tiempo de exposición se realizó en base a las condiciones imperantes al ini-

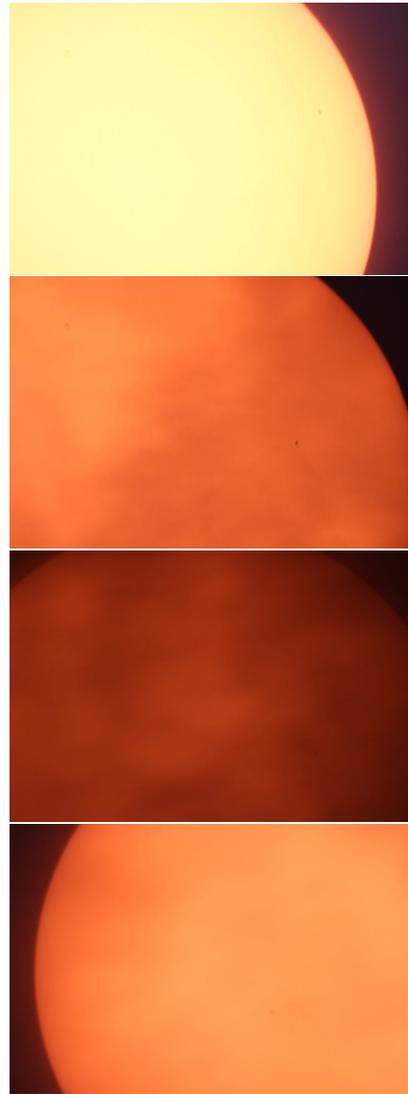


Figura 1: Algunas de las fotografías obtenidas durante el tránsito. Puede apreciarse no sólo las diferencias en la iluminación de la imagen (debidas a la nubosidad variable) sino la poca presencia del limbo solar, que conspiraba contra la determinación de su radio y posición de su centro.

cio del tránsito y no fueron luego modificadas (por culpable inadvertencia), lo que provocó que las fotografías logradas con menor nubosidad resultaran ligeramente sobreexpuestas, lo cual dificultó el procesamiento posterior, aun sin impedirlo.

### III. PROCESAMIENTO DE LAS FOTOGRAFÍAS

EL PROCESAMIENTO de las fotografías puede dividirse en dos partes: i) la detección de los bordes y ii) la determinación de los radios y centros de las circunferencias del Sol y Mercurio.

Las fotografías resultaron un gran desafío a la hora de ser enfrentadas a un algoritmo de detección de bordes e identificación de circunferencias, como puede comprobarse en la diversidad que revelan las de la figura 1.

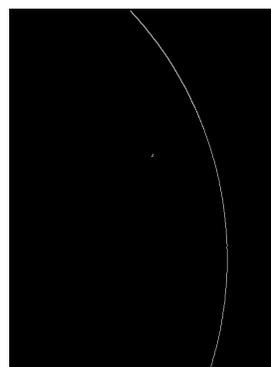
En primer lugar, y como ya fuera comentado más arriba, la nubosidad fue muy variable durante el tránsito. En segundo lugar, el aumento del telescopio y el tamaño del sensor de la cámara impidieron obtener la imagen completa del Sol en cada fotografía. Sin embargo, ambos inconvenientes fueron resueltos satisfactoriamente por CECI.

#### I. Detección de bordes

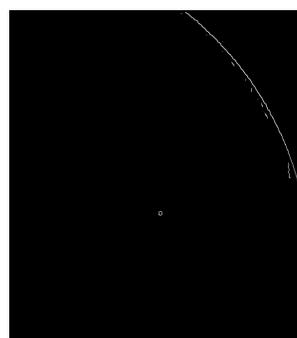
PARA LA detección de bordes se eligió el algoritmo ya clásico de John Canny [Canny 1986]. En el contexto de este trabajo se siguió la exposición del mismo que figura en [codinggame]. Los resultados pueden apreciarse en la figura 2.

Este algoritmo es de aplicación general, pero gran parte de su eficacia descansa en la elección de dos parámetros que dependen de la imagen que en particular se esté analizando. Los detalles se desarrollan en las referencias señaladas en el párrafo anterior y en el apéndice I de este trabajo; pero señalaremos aquí que, tras procesar todas las imágenes, se descubrió que con unas pocas parejas de estos valores era posible detectar los bordes de todas las fotografías.

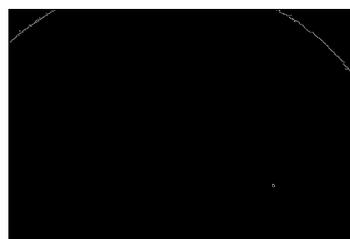
Por otra parte, en algunos casos (como, por ejemplo, los dos primeros de la figura 2) resultó imposible lograr los bordes del Sol y de Mercurio sin sumar bordes espurios, debidos parcialmente a la nubosidad pero, sobre todo, a la aparición cerca de una esquina de las fotografías de una de esas molestas motas de polvo



(a)  $f\text{-min}$ : 0,2  $f\text{-max}$ : 0,27



(b)  $f\text{-min}$ : 0,1  $f\text{-max}$ : 0,18



(c)  $f\text{-min}$ : 0,2  $f\text{-max}$ : 0,5



(d)  $f\text{-min}$ : 0,2  $f\text{-max}$ : 0,25

Figura 2: Bordes del Sol y de Mercurio detectados en las cuatro fotografías de la figura 1 mediante CECI. La significación de los parámetros indicados bajo cada imagen se detallan en el apéndice.

que suelen eliminarse con un buen *flat-field*. Lamentablemente esta precaución no se tomó a su debido momento, por lo que se apeló a una solución eficaz aunque drástica, recortando las imágenes contaminadas por esa mancha con el programa `IMAGEMAGICK` [`IMAGEMAGICK`], que permite realizar operaciones sobre imágenes desde la línea de comandos, por lo que pudo aplicarse a grandes cantidades en pocos segundos.

## II. Identificación de las circunferencias del Sol y de Mercurio

**P**ARA DETECTAR las circunferencias presentes en las imágenes de los bordes obtenidos en el paso anterior se utilizó uno de los cinco métodos tratados en [Umbach, Jones 2003]: el denominado MLS (por las iniciales de *Modified Least Squares*). Lo que este método realiza es el ajuste de los puntos en cuestión a una circunferencia por el método de los cuadrados mínimos.

El mismo, como pudo comprobarse en las imágenes analizadas, es asombrosamente robusto y eficaz. El único inconveniente que presenta es que es incapaz de discriminar, por sí mismo, qué puntos pertenecen a una circunferencia o a otra (en nuestro caso, el Sol y Mercurio). Por lo que antes de invocarlo, hubo que incluir en CECI una manera de distinguir los puntos del Sol y los de Mercurio. Se emplearon dos:

- a) Cuando Mercurio estaba relativamente cerca del limbo solar (como en los casos (a) y (b) de la figura 2).

En este caso, la discriminación de los puntos de ambos cuerpos se realizaba en etapas:

- 1) En primer lugar, se calculaba la circunferencia que pasaba por *todos* los puntos de la imagen, sin distinción.
- 2) Luego, atendiendo a que los puntos de Mercurio eran pocos (en número) en relación a los del Sol, se decidía que pertenecían a éste sólo los puntos

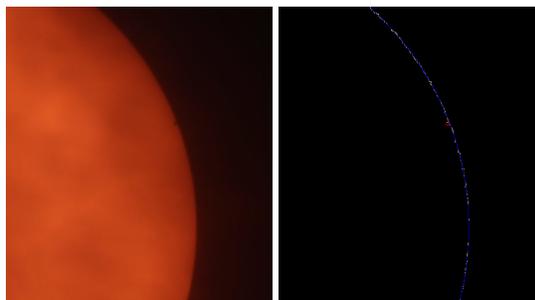


Figura 3: Las circunferencias del Sol (en azul) y Mercurio (en rojo) identificadas en una fotografía tomada poco después del inicio del tránsito.

cuya distancia al centro de la circunferencia calculada en el punto anterior difería del radio también calculado en una cantidad menor a un cierto valor escogido por el usuario (que iba entre los 5 y 100 píxeles, dependiendo de la imagen).

- 3) Se calculaba la circunferencia que ajustaba sólo los puntos así elegidos en el paso anterior.
- 4) Se realizaba un segundo filtrado de los puntos, con el mismo criterio del punto 2).
- 5) Con los puntos elegidos tras el punto 4), se calculaba el centro y radio de la circunferencia solar considerada ahora definitiva.
- 6) Finalmente, los puntos que no pertenecían al Sol se atribuían a Mercurio y se calculaban el centro y radio del mismo.

La eficacia de este método puede apreciarse en la figura 3.

- b) Cuando Mercurio y el limbo solar estaban en espacios claramente separados de la fotografía (como en los casos (c) y (d) de la figura 2).

En este caso, los pasos anteriores no eran eficaces para distinguir al Sol de Mercurio ya que, por pocos que fueran los puntos de

este último, bastaban para obligar al método MLS a ajustar una circunferencia severamente afectada por ellos. Por lo tanto, se apeló a un recurso sencillo pero eficaz: el usuario debía indicar a CECI, *grosso modo*, un rectángulo que abarcara los puntos del borde del Sol mediante las coordenadas de sus esquinas superior izquierda e inferior derecha. De esta manera, con los puntos dentro de ese rectángulo se calculaban centro y radio de la circunferencia solar, y con el resto los de Mercurio. Debido a que sólo hubo que mover pocas veces el telescopio durante el tránsito, sólo hubo que utilizar cuatro rectángulos distintos.

Obsérvese que este método no puede aplicarse a los casos anteriores, ya que en ellos Mercurio queda dentro de cualquier rectángulo que abarque la totalidad del limbo solar, o muy cerca del mismo, lo que hubiera exigido una elección demasiado ajustada de las coordenadas extremas de dicho rectángulo (cfr. figura 2).

Los resultados de ambos métodos pueden apreciarse en la figura 4.

#### IV. ANÁLISIS Y RESULTADOS

LAS POSICIONES de los centros del Sol y de Mercurio y sus respectivos radios aparentes, tal como fueron resueltos por CECI en cada una de las fotografías, fueron volcados por el mismo programa en un archivo de texto. Al mismo se añadieron luego (mediante los comandos `SORT` y `JOIN` de `BASH`), los valores de los instantes de tiempo en que fueron tomadas las fotografías, los cuales fueron obtenidos a su vez gracias al programa `DCRAW` [`DCRAW`], también ejecutable en línea de comandos.

Los valores más representativos de los radios aparentes de ambos astros fueron logrados ajustando sendas rectas horizontales a los datos respectivos, como puede verse en las figuras 5 y 6.

Para determinar los contactos del tránsito, se ajustó en primer lugar una parábola a las distancias —elevadas al cuadrado— entre los

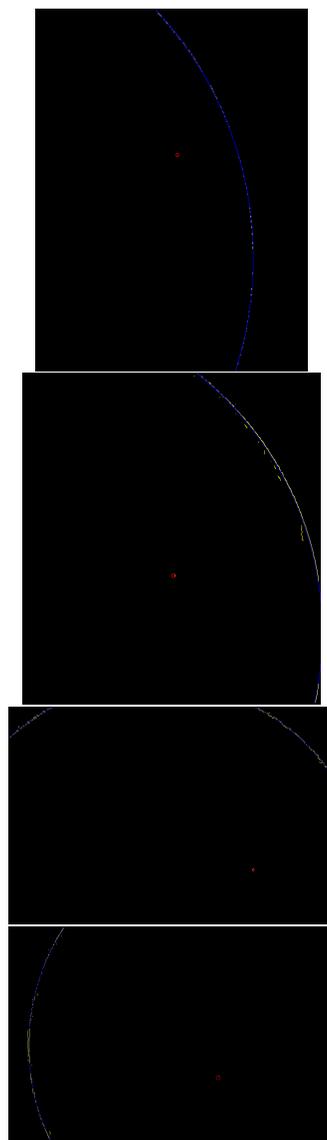


Figura 4: Las circunferencias del Sol (en azul) y Mercurio (en rojo) identificadas para las mismas fotografías de las figuras 1 y 2.

centros del Sol y de Mercurio. La razón de este proceder es la siguiente: durante el tránsito, que duró unas 6 horas, podemos suponer con alto grado de precisión que las velocidades orbitales de la Tierra y de Mercurio se mantuvieron constantes, y que el plano orbital de este último, debido a encontrarse el planeta tan cerca de un nodo, se veía prácticamente

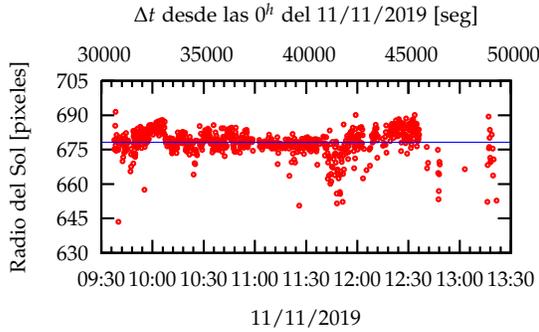


Figura 5: Datos del radio aparente solar (en pixeles) y su valor más representativo: 678,14 pixeles.

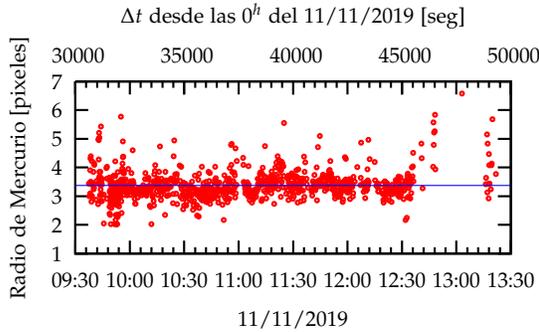


Figura 6: Datos del radio aparente de Mercurio (en pixeles) y su valor más representativo: 3,37 pixeles.

sin escorzo alguno. Por lo tanto, si ubicamos el origen de un sistema cartesiano en el centro del Sol, sin importar su orientación, la velocidad aparente de Mercurio debe ser constante (cfr. figura 7) y su movimiento un MRU. Así, si llamamos  $r$  a la distancia aparente entre el centro de Mercurio y el del Sol,

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

donde  $x$  y  $y$  son las coordenadas de Mercurio en dicho sistema cartesiano. Pero

$$\begin{aligned} x &= v_x \Delta t + x_0 \\ y &= v_y \Delta t + y_0 \end{aligned}$$

por lo cual

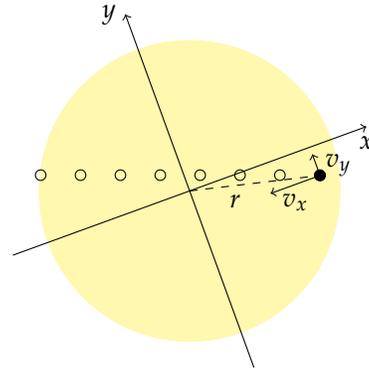


Figura 7: Tránsito de Mercurio. Debido a la brevedad del suceso en relación al periodo sinódico de Mercurio y a que se encuentra tan cerca de su nodo orbital podemos suponer que su trayectoria aparente es un MRU en cualquier sistema cartesiando centrado en el Sol.

$$r^2 = (v_x^2 + v_y^2) \Delta t^2 + (2v_x v_y x_0 y_0) \Delta t + (x_0^2 + y_0^2)$$

donde cada expresión entre paréntesis es constante, lo cual significa que la relación entre la distancia entre los centros del Sol y Mercurio elevada al cuadrado y el tiempo es cuadrática.

Los datos y su ajuste se muestran en la figura 8.

El instante del máximo del tránsito se obtiene de manera inmediata buscando el vértice de la parábola. Los contactos surgen de considerar que en el primer y el cuarto contacto las distancias entre los centros del Sol y de Mercurio son iguales a la suma de sus radios aparentes, y en el segundo y tercero dichas distancias igualan la diferencia del radio solar y de Mercurio. Por lo tanto, el problema se reduce a buscar las intersecciones de la parábola de ajuste con las rectas horizontales cuyas ordenadas son, para el primer y el cuarto contacto,  $(r_{Sol} + r_{Mercurio})^2$ , y para el segundo y el tercero  $(r_{Sol} - r_{Mercurio})^2$ .

Los valores obtenidos se presentan en el cuadro 1, comparados con los calculados en [Jubier], cuyo autor se basa en algoritmos ofrecidos por Jean Meeus en sus obras clásicas *Transits* y *Astronomical Algorithms*.

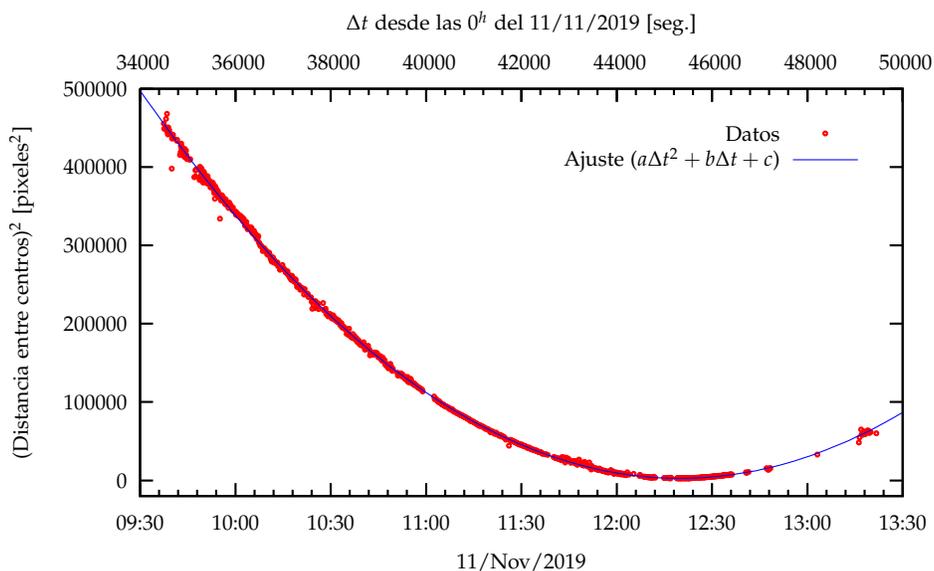


Figura 8: Ajuste de las distancias entre los centros del Sol y Mercurio elevadas al cuadrado. Los parámetros de la parábola resultaron ser  $a = 0,00476108$ ,  $b = -422,753$  y  $c = 9,38712 \times 10^6$ .

Tabla 1: Resultados comparativos del trabajo con los calculados por [Jubier].

	Xavier Jubier	CECI	$\epsilon_{abs}$
1.er contacto	09:35:45	09:35:48	00:00:03
2.do contacto	09:37:26	09:37:27	00:00:01
Máximo del tránsito	12:19:46	12:19:57	00:00:11
3.er contacto	15:02:07	15:02:27	00:00:20
4.to contacto	15:03:48	15:04:05	00:00:17

Tabla 2: Resultados comparativos del trabajo con los calculados por [Jubier] y por [HORIZONS].

	Xavier Jubier	HORIZONS	CECI	$\epsilon_{abs}$	$\epsilon_{rel}$
Distancia mínima entre centros	77,1''		76,39''	0,71''	0,92 %
Radio aparente del Sol		969,34''	998,99''	29,65''	3,06 %
Radio aparente de Mercurio		4,98''	4,97''	0,01''	0,2 %

La menor distancia entre centros es la raíz cuadrada de la ordenada del vértice de la parábola. La misma resultó ser de 51,86 pixeles. Ahora bien, antes del procesamiento con CECI, las fotografías originales de 5184x3456 pixeles fueron reducidas, con el IMAGEMAGICK, a un tamaño de 1024x683 pixeles (Esto se debió a que el tamaño original resultaba demasiado exigente para la computadora del autor, en la

que se ejecutaba CECI). Por lo tanto, una distancia de 51,86 pixeles en una imagen de 1024x683 pixeles se corresponde en el archivo original a una distancia de  $51,86 \times 5184/1024 = 262,54$  pixeles. Como sabemos que los pixeles del *chip CMOS* de la cámara del Observatorio son cuadrados, y entre centros presentan un tamaño de unos  $4,3 \mu\text{m}$ , y que la distancia focal efectiva de nuestro telescopio es de 3,048 m, un sencillo

cálculo<sup>3</sup> nos permite obtener la distancia aparente angular correspondiente en segundos de arco. Lo mismo puede aplicarse a los tamaños angulares aparentes del Sol y de Mercurio. En el cuadro 2 se comparan los resultados obtenidos con los calculados por Xavier Juvier y por el programa HORIZONS del *Jet Propulsion Laboratory* de la NASA [HORIZONS].

## V. CONCLUSIONES

Estuvo muy bueno. Llama la atención que pese a valores de una dispersión relativamente elevada (como podemos comprobar, entre otras cosas, en los valores de los radios aparentes del Sol y Mercurio medidos por CECI en las fotografías —cfr. figuras 5 y 6), que podemos atribuir a las condiciones meteorológicas y a una mala elección del tiempo de exposición, la determinación de los dos primeros contactos coincida prácticamente con los valores calculados por probados y confiables métodos de mecánica celeste. Incluso los dos últimos contactos no presentan una gran diferencia con los calculados por estos mismos métodos, lo cual resulta más llamativo si consideramos que las últimas fotografías fueron obtenidas cerca de una hora y media antes de la finalización del tránsito.

No podemos menos que esperar a enfrentar a CECI con los próximos desafíos: Mercurio en 2032 y Venus en 2117.

## REFERENCIAS

- [NASA Transits] *Seven Century Catalog of Mercury Transits: 1601 CE to 2300 CE*, <https://eclipse.gsfc.nasa.gov/transit/catalog/MercuryCatalog.html> (visitado en 2019).
- [Thorvaldsen 2013] Thorvaldsen, S., *From Keplerian Orbits to Precise Planetary Predictions: the Transits of the 1630s*, *The Journal of Astronomical Data*, 2013,
- <sup>3</sup> $\alpha = d/F$ , donde  $\alpha$  es el ángulo (en radianes) subtendido por un objeto que presenta una distancia  $d$  en el plano focal de un telescopio de distancia focal efectiva  $F$ .
- [https://www.vub.be/STER/JAD/JAD19/jad19\\_1/jad19\\_1j.pdf](https://www.vub.be/STER/JAD/JAD19/jad19_1/jad19_1j.pdf) (visitado en 2019).
- [Hughes 2001] Hughes, D. W., *Six stages in the history of the astronomical unit*, *Journal of Astronomical History and Heritage*, 4(1):15–28, 2001.
- [Canny 1986] Canny, J., *A Computational Approach To Edge Detection*, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(6):679–698, 1986.
- [codinggame] <https://www.codingame.com/playgrounds/38470/how-to-detect-circles-in-images> (visitado en 2019).
- [GNUPLOT] <http://www.gnuplot.info/> (visitado en 2019).
- [IMAGEMAGICK] <https://imagemagick.org/index.php> (visitado en 2019).
- [Umbach, Jones 2003] Umbach, D., Jones, K.N., *A few methods for fitting circles to data*, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 52(6):1881–1885, Dec. 2003. (Existe una versión preliminar de acceso gratuito: <https://pdfs.semanticscholar.org/faac/44067f04abf10af7dd583fca0c35c5937f95.pdf>)
- [DCRAW] <https://www.dechifro.org/dcraw/> (visitado en 2019).
- [Jubier] Jubier, X., *Mercury Transit Calculator*, [http://xjubier.free.fr/en/site\\_pages/MercuryTransitCalculator.html](http://xjubier.free.fr/en/site_pages/MercuryTransitCalculator.html) (visitado en 2019).
- [HORIZONS] *HORIZONS System*, <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi> (visitado en 2019).

## APÉNDICE

## I. Método de Canny para la detección de bordes

El método propuesto por John Canny [Canny 1986] puede exponerse en los siguientes pasos:

- a) Conversión a escala de grises.  
Necesaria para poder trabajar con un solo valor de intensidad por pixel. En este paso la imagen se transforma en una matriz  $M$  de dos dimensiones (ancho y alto de la imagen original), el valor de cuyos elementos es el nivel de intensidad del pixel correspondiente, en una escala de 0 a 255.
- b) Aplicación de un filtro de suavizado gaussiano.  
A fin de eliminar algo de ruido, al cual es muy sensible el proceso siguiente de detección del gradiente de la imagen. La matriz de convolución utilizada es la propuesta en [codinggame]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{256}$$

- c) Cómputo del gradiente de la imagen.  
Éste puede considerarse el primer paso verdaderamente característico del método de detección de bordes (los anteriores pueden concebirse como preparatorios). Se recorre la imagen, calculando para cada pixel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial x} &= M[x+1, y] - M[x-1, y] \\ \frac{\partial M}{\partial y} &= M[x, y+1] - M[x, y-1] \end{aligned}$$

con lo que el gradiente resulta otra matriz ( $G$ ) cuyos elementos se calculan como:

$$G[x, y] = \sqrt{\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)^2}$$

Además del gradiente se calcula la dirección del gradiente en cada pixel y se almacena en otra matriz ( $D$ ):

$$D[x, y] = \arctan_2\left(\frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial M}{\partial x}\right)$$

donde la función  $\arctan_2$  es la variante de la arcotangente —disponible en la mayoría de los lenguaje de programación— que devuelve el ángulo cuyo seno es el primer argumento y cuyo coseno es el segundo (de esta manera, el conjunto imagen de  $\arctan_2$  es  $[0, 2\pi)$ ).

Las direcciones, antes ser utilizadas en el paso siguientes, se reducen a 4 posibilidades:  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ ,  $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ ,  $[\frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4})$  y  $[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})$ . En otras palabras, a las direcciones “derecha”, “arriba”, “izquierda” y “abajo”.

- d) Detección de los puntos con mayor gradiente entre sus vecinos.  
En este paso recorreremos la matriz  $G$  transformando en cero aquellos pixeles cuyo gradiente sea inferior al de sus dos vecinos orientados según la dirección del gradiente en esa posición. De esta manera, “sobreviven” a este paso sólo aquellos pixeles cuyo gradiente sea un máximo en la dirección de máximo cambio del gradiente.
- e) Detección de los puntos con mayor gradiente en toda la imagen.

Este paso es el más delicado de los cinco, y el único que depende del ingreso de dos parámetros por parte del usuario. Consiste en crear una matriz  $G'$  empleando dos parámetros  $max$  y  $min$  de forma tal que:

$$G'[x, y] = \begin{cases} 255 & \text{si } G[x, y] > max \\ 0 & \text{si } G[x, y] < min \end{cases}$$

Luego, los pixeles  $G'[x, y]$  tales que  $min < G[x, y] < max$  se igualan a 255 si son vecinos inmediatos a alguno que haya superado la prueba anterior, y a cero en caso contrario. Este último paso se repite,

buscando nuevos vecinos para los cuales  $min < G[x,y] < max$ . La matriz  $G'$  es el resultado del proceso, conteniendo los bordes buscados.

La elección de los parámetros  $min$  y  $max$  depende fuertemente de la imagen en cuestión. En el caso de CECI, el usuario puede elegirlos como un factor ( $f-min$  y  $f-max$ ) de la intensidad máxima de la matriz  $G$ .