Trigonometría esférica

Prof. Luis G. López

12 de septiembre de 2013

Resumen

Se deducen las tres fórmulas fundamentales de la trigonometría esférica, y otras para los casos particulares de los triángulos rectángulos y rectiláteros. También se ofrecen problemas para aplicarlas, algunos de ellos clásicos, como la transformación de coordenadas astronómicas.

Índice

1. Definiciones

Se llama *triángulo esférico* a la figura formada sobre la superficie de una esfera con los arcos de tres círculos máximos (figura 1).

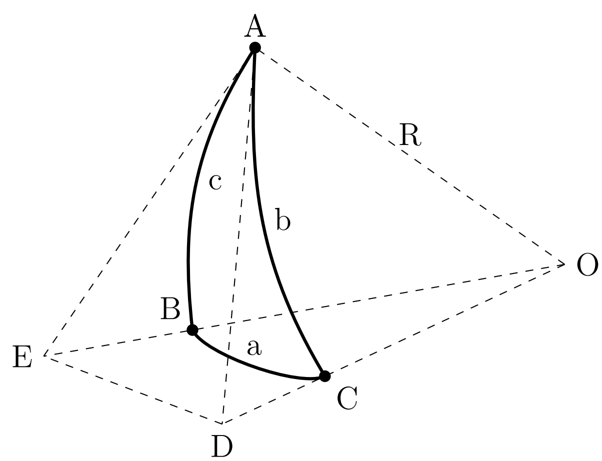

Figura 1: Triángulo esférico

Un triángulo esférico se caracteriza por seis ángulos:

- Los tres lados (a, b y c en la figura 1) cuya medida es la medida de su arco.
- Los tres ángulos diedros entre los planos de los círculos máximos (A, B y C en la figura 1).

Resulta natural estudiar sólo los triángulos cuyos ángulos y lados no superen 180°, en cuyo caso puede demostrarse que la suma de sus ángulos es mayor a 180° pero menor a 540°, y la suma de sus tres lados es menor de 360°.

2. Fórmulas fundamentales

2.1. Relación del coseno

Sea O el centro de la esfera sobre la que se forma el triángulo esférico ABC. Tracemos desde A las tangentes AD y AE a los lados b y c hasta su intersección con las prolongaciones de los radios OC y OB. Aplicamos el teorema del coseno de la trigonometría plana a los triángulos OED y AED:

$$\begin{aligned} DE^2 &= OD^2 + OE^2 - 2OD \cdot OE \cos a \\ DE^2 &= AD^2 + AE^2 - 2AD \cdot AE \cos A \end{aligned}$$

Restamos ambas ecuaciones y tenemos:

$$2OD \cdot OE \cos a = OD^2 - AD^2 + OE^2 - AE^2 + 2AD \cdot AE \cos A \qquad (1)$$

De los triángulos planos OAE y OAD se deduce:

$$OD^2 - AD^2 = R^2 \qquad OE^2 - AE^2 = R^2 \qquad AD = R \operatorname{tg} b \qquad AE = R \operatorname{tg} c$$

$$OD = \frac{R}{\cos b} \qquad OE = \frac{R}{\cos c}$$

Reemplacemos en (1) y obtenemos:

$$2\frac{R}{\cos b}\frac{R}{\cos c} \cos a = R^2 + R^2 + 2R \operatorname{tg} b R \operatorname{tg} c \cos A$$

$$2\frac{\cos a}{\cos b \cos c} = 2 + 2 \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \cos A$$

Multiplicando por $(\cos b \cos c)/2$:

$$\boxed{\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A} \tag{2}$$

2.2. Relación del seno por el coseno o fórmula de los cinco elementos

La fórmula (2) puede escribirse para el lado b:

$$\cos b = \cos c \cos a + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} a \cos B$$

y sustituir en ella el $\cos a$ de la ecuación (2):

$$\cos b = \cos c(\cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A) + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} a \cos B$$

$$\cos b = \cos^2 c \cos b + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos c \cos A + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} a \cos B$$

$$\cos b(1 - \cos^2 c) = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos c \cos A + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} a \cos B$$

Si sustituimos $(1 - \cos^2 c)$ por $\operatorname{sen}^2 c$ y dividimos todo por $\operatorname{sen} c$:

$$\boxed{\operatorname{sen} a \cos B = \operatorname{sen} c \cos b - \cos c \operatorname{sen} b \cos A} \tag{3}$$

2.3. Relación de los senos

Despejemos $\cos A$ de la ecuación (2):

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}$$

Elevemos al cuadrado y restemos de la unidad ambos miembros:

$$1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}\right)^2$$

$$\operatorname{sen}^2 A = 1 - \frac{\cos^2 a - 2\cos a \cos b \cos c + \cos^2 b \cos^2 c}{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c}$$

$$\operatorname{sen}^2 A = \frac{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c - \cos^2 a + 2\cos a \cos b \cos c - \cos^2 b \cos^2 c}{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c}$$

$$\operatorname{sen}^2 A = \frac{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - \cos^2 a + 2\cos a \cos b \cos c - \cos^2 b \cos^2 c}{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c}$$

$$\operatorname{sen}^2 A = \frac{1 - \cos^2 c - \cos^2 b + \cos^2 b \cos^2 c - \cos^2 a + 2\cos a \cos b \cos c - \cos^2 b \cos^2 c}{\operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c}$$

Dividamos por $\operatorname{sen}^2 a$:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 A}{\operatorname{sen}^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\operatorname{sen}^2 a \operatorname{sen}^2 b \operatorname{sen}^2 c}$$

La expresión anterior es perfectamente simétrica con respecto a a, b y c, por lo que:

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}} \tag{4}$$

2.4. Observación

Las deducciones precedentes suponen que la construcción de la figura 1 es realizable, lo cual sólo es posible si efectivamente existen los puntos D y E. Para que esto ocurra, es necesario que los lados b y c sean menores que 90º. Para verificar que las fórmulas anteriores resultan válidas para cualquier triángulo esférico, restan por considerar entonces los siguientes casos particulares:

b > 90º y c > 90º: Es posible construir (figura 2) sobre los respectivos círculos máximos un triángulo esférico de lados a, $180^\circ - b$ y $180^\circ - c$, con vértices B, C y el punto diametralmente opuesto a A, para el cual resultará válida la construcción, y en el que podemos comprobar que $\cos a = \cos(180^\circ - b)\cos(180^\circ - c) + \operatorname{sen}(180^\circ - b)\operatorname{sen}(180^\circ - c)\cos A$ (puesto que $A = A'$), lo cual nos conduce a la ecuación (2) teniendo en cuenta que $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ y $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$.

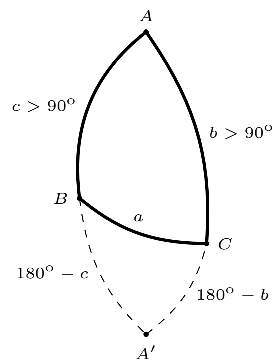

Figura 2: $b > 90^o$ y $c > 90^o$

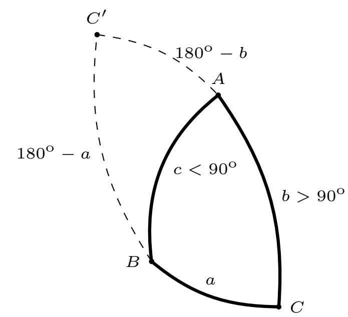

Figura 3: $b > 90^o$ y $c < 90^o$

$\mathbf{b > 90^o}$ y $\mathbf{c < 90^o}$: Es posible construir un triángulo esférico (figura 3) con vértices en A, B y el punto diametralmente opuesto a C, y lados iguales a $180^o - a$, $180^o - b$ y c, para el cual nuevamente será válida la construcción de la figura (1), que nos permitirá comprobar nuevamente que la ecuación (2) es válida para el triángulo original efectuando los correspondientes reemplazos (hay que tener en cuenta que el ángulo entre los lados c y $180^o - b$ es $180^o - A$).

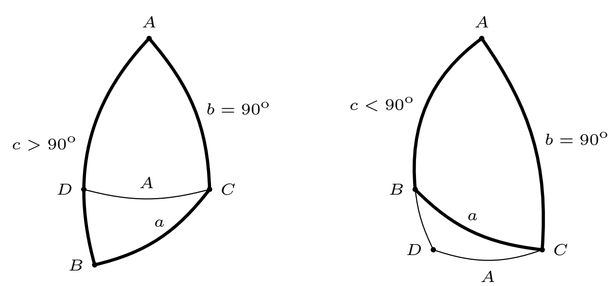

Figura 4: $b = 90^o$ y $c \neq 90^o$ (con $AD = 90^o$)

$\mathbf{b = 90^o}$ y $\mathbf{c = 90^o}$: En este caso tanto B como C serán también iguales a 90^o, y a será igual a A, por lo que dicho triángulo verificará la fórmula (2) trivialmente: $\cos a = \cos A$.

$\mathbf{b = 90^o}$ y $\mathbf{c \neq 90^o}$: Unamos C con el punto D, ubicado a 90^o de A y a lo largo del círculo máximo que va desde A hasta B —con lo cual

$CD = A$. Si $CD = 90^o$, el punto C será un *polo*[1] del arco AB (dado que al encontrarse C a 90^o de dos puntos distintos —A y D— de un mismo círculo máximo, se trata de un *polo* del mismo). En ese caso, cualquier arco de círculo máximo que lo una al arco AB tendrá también 90^o: en particular, a. Entonces, el triángulo ABC verificará trivialmente la fórmula (2).

Si $CD \neq 90^o$, como también el arco $BD \neq 90^o$, podemos aplicar al triángulo BCD la fórmula (2): $\cos a = \cos BD \cos A + \operatorname{sen} BD \operatorname{sen} A \cos BDC$, pero $BDC = 90^o$ y $BD = \pm(90^o - c)$, con lo cual arribamos a $\cos a = \operatorname{sen} c \cos A$, que no es otra cosa que la ecuación (2) con $b = 90^o$.

Las ecuaciones (3) y (4) se deducen de la (2), por lo que comprobamos la validez de las tres fórmulas fundamentales para todos los triángulos esféricos posibles.

3. Fórmulas particulares

3.1. Triángulo esférico rectángulo

Si uno de los ángulos es igual a 90^o, se dice que el triángulo esférico es *rectángulo*. Sea A igual a un recto. De la relación del coseno (2) obtenemos:

$$\boxed{\cos a = \cos b \cos c} \tag{5}$$

De la relación del seno por el coseno (3):

$$\operatorname{sen} a \cos B = \operatorname{sen} c \cos b$$

$$\boxed{\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} c \cos b}{\cos B}} \tag{6}$$

[1]Se llama *polo* de un círculo máximo porque, si imaginamos a este último como un ecuador de la esfera, se hallará en uno de los polos de la misma.

Si dividimos (6) y (5):

$$\boxed{\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{tg} c}{\cos B}} \tag{7}$$

De la relación de los senos (4):

$$\boxed{\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B}} \tag{8}$$

También de la relación del seno por el coseno (3):

$$\operatorname{sen} b \cos A = \operatorname{sen} c \cos a - \operatorname{sen} a \cos c \cos B$$

$$\operatorname{sen} a = \frac{\operatorname{sen} c \cos a}{\cos c \cos B} \tag{9}$$

Y si ahora igualamos el segundo miembro de (8) con el $\operatorname{sen} a$ de (9):

$$\boxed{\cos a = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{tg} c \operatorname{tg} B}} \tag{10}$$

Si también igualamos el segundo miembro de (10) con el de (5):

$$\cos b \cos c = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{tg} c \operatorname{tg} B}$$

$$\boxed{\operatorname{sen} c = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B}} \tag{11}$$

3.2. Triángulo esférico rectilátero

Si uno de los lados es igual a 90º, se dice que el triángulo esférico es *rectilátero*. Sea a igual a un recto. De la relación del coseno (2) obtenemos:

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$

$$\boxed{\cos A = -\operatorname{cotg} b \operatorname{cotg} c} \tag{12}$$

También de la relación del coseno (2):

$$\cos b = \cos a \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos B$$

$$\boxed{\cos b = \operatorname{sen} c \cos B} \tag{13}$$

De la relación de los senos (4):

$$\boxed{\operatorname{sen} A = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} b}} \tag{14}$$

4. Aplicaciones y problemas

4.1. Transformación de coordenadas

Para deducir las ecuaciones de transformación de coordenadas acimutales a ecuatoriales y viceversa, planteamos el *triángulo paraláctico* (figura 5), cuyos vértices son el polo celeste visible (**PC**), el cenit (**Z**) y el astro (★). Recordemos que para que la aplicación de las fórmulas anteriores resulte válida, los lados que unen dichos vértices deberán ser arcos de círculos máximos: entre **PC** y **Z** el meridiando del lugar, entre **Z** y ★ el círculo vertical del astro, y entre **PC** y ★ el meridiano celeste o círculo horario del mismo.

Adoptaremos como convención que el acimut se mide desde el sur hacia el oeste, y para la construcción de la figura que el polo visible es el austral. De esta manera, comprobamos que los ángulos con vértice en **Z** y **PC** son el acimut (A) y el ángulo horario (t), respectivamente. El ángulo q con vértice en ★ se denomina *ángulo paraláctico*.

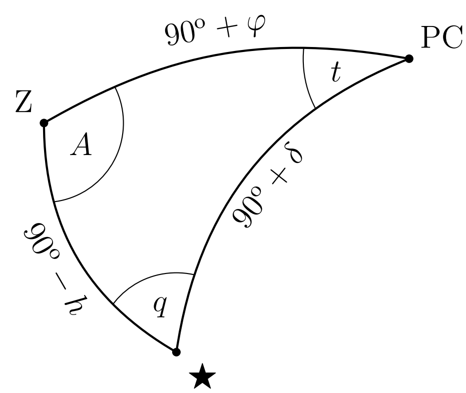

Figura 5: Triángulo paraláctico

Como vemos, en el triángulo paraláctico aparece el ángulo horario, y no la ascensión recta, por lo que estrictamente las ecuaciones siguientes vincularán el sistema acimutal con el ecuatorial horario o relativo. Por supuesto, la obtención de la ascensión recta sólo requiere el conocimiento de la hora sidérea (θ_s), ya que:

$$\theta_s = t + \alpha$$

4.1.1. Acimutales a ecuatoriales

Por la fórmula (2) aplicada al triángulo paraláctico:

$$\cos(90^\circ + \delta) = \cos(90^\circ + \varphi)\cos(90^\circ - h) + \operatorname{sen}(90^\circ + \varphi)\operatorname{sen}(90^\circ - h)\cos A$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} h - \cos\varphi \cos h \cos A} \tag{15}$$

Es interesante comprobar que la ecuación (15) nos devuelve la declinación como un *arcoseno*, función cuyo conjunto imagen es [-90º;90º], coincidente con los posibles valores que puede tomar la declinación. Si la fórmula, en cambio, nos devolviera el valor del *coseno* de δ, nos encontraríamos ante una ambigüedad del valor de δ, que deberíamos resolver mediante otra fórmula.

También resulta interesante comprobar que la fórmula (15) expresa, como esperábamos, que el valor de la declinación sólo depende de la altura, el acimut y la latitud del lugar de observación.

Apliquemos ahora la fórmula (4):

$$\frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{sen}(90^\circ - h)} = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen}(90^\circ + \delta)}$$

$$\operatorname{sen} t = \frac{\operatorname{sen} A \cos h}{\cos\delta} \tag{16}$$

Esta fórmula nos permite obtener el *seno* de t en función de parámetros conocidos (la declinación la obtuvimos previamente gracias a (15)). El inconveniente es que nos encontramos ante una ambigüedad en el valor del ángulo horario: si bien éste puede tomar valores entre 0º y 360º[2], el arcoseno nos devolverá valores dentro de su conjunto imagen: [-90º;90º]. Por esta razón, debemos hacer uso de la relación (3):

$$\operatorname{sen}(90^\circ + \delta)\cos t = \operatorname{sen}(90^\circ + \varphi)\cos(90^\circ - h) - \cos(90^\circ + \varphi)\operatorname{sen}(90^\circ - h)\cos A$$

$$\cos t = \frac{\cos\varphi \operatorname{sen} h + \operatorname{sen}\varphi \cos h \cos A}{\cos\delta} \tag{17}$$

Ahora sí, podemos aprovechar la información que nos ofrecen ambas ecuaciones para conocer inequívocamente el valor de t. Una posible manera de

[2] O entre 0^h y 24^h, como con más frecuencia se emplea en Astronomía.

conseguirlo, es usar primero la ecuación (16), y luego tomando el signo del segundo miembro de (17), ubicar a t en el cuadrante correcto.

Observemos también que podemos expresar $\operatorname{tg} t$ como un cociente, dividiendo (16) y (17):

$$\boxed{\operatorname{tg} t = \frac{\operatorname{sen} A \cos h}{\cos\varphi \operatorname{sen} h + \operatorname{sen}\varphi \cos h \cos A}} \tag{18}$$

La utilidad de esta fórmula queda de manifiesto al considerar que la mayoría de los lenguajes de programación (incluyendo los que forman parte de las planillas de cálculo) tienen una función *arcotangente* que admite dos parámetros, que son interpretados por el lenguaje precisamente como el numerador y el denominador de una fracción igual a la tangente del ángulo buscado, devolviendo éste en el cuadrante correcto de manera automática.

Resulta interesante observar, nuevamente, que esta fórmula expresa que t depende exclusivamente de la altura, el acimut y la latitud del lugar (¡incluso la declinación tuvo la delicadeza de desaparecer en el cociente!).

4.1.2. Ecuatoriales a acimutales

El problema es en esencia el mismo, pero propuesto para otros ángulos:

$$\boxed{\operatorname{sen} h = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t} \tag{19}$$

$$\operatorname{sen} A = \frac{\operatorname{sen} t \cos\delta}{\cos h}$$

$$\cos A = \frac{\operatorname{sen}\varphi \cos\delta \cos t - \cos\varphi \operatorname{sen}\delta}{\cos h}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{sen} t \cos\delta}{\operatorname{sen}\varphi \cos\delta \cos t - \cos\varphi \operatorname{sen}\delta}} \tag{20}$$

Pueden realizarse las mismas observaciones que en el apartado anterior.

4.2. Problemas varios

4.2.1. Problema Nº 76 de [2]

Expresar la distancia angular d entre dos puntos de la esfera celeste, las coordenadas de los cuales son dadas en el sistema ecuatorial.

4.2.2. Problema Nº 168 de [2]

Deducir la fórmula que expresa, para una estrella de declinación δ mayor a la latitud φ del lugar (siendo ambas del mismo signo), el valor máximo del acimut A (al este y al oeste del meridiando del lugar).

4.2.3. Proyección del recorrido solar sobre el ecuador celeste

1. Expresar la proyección del recorrido $\Delta\alpha$ del Sol sobre el ecuador celeste desde un equinoccio, conociendo el valor de su recorrido sobre la eclíptica y, por supuesto, la inclinación de este plano[3].

2. Expresar la proyección del recorrido $\Delta\alpha$ del Sol sobre el ecuador celeste desde un equinoccio, conociendo el valor de la declinación solar y, por supuesto, la inclinación de la eclíptica.

4.2.4. Acimut de salida y puesta de un astro

Expresar el valor del acimut de salida y puesta de un astro, conociendo su declinación y la latitud del lugar.

4.2.5. Arco diurno de un astro

Expresar el valor del arco D del recorrido diurno de un astro no circumpolar, conociendo su declinación y la latitud del lugar.

[3] Como ejercicio interesante puede el lector usar la solución de este problema para trazar la parte de la ecuación de tiempo debida a la inclinación de la eclíptica.

4.2.6. Respuestas a los problemas

- 4.2.1

$$\cos d = \operatorname{sen}\delta_1 \operatorname{sen}\delta_2 + \cos\delta_1 \cos\delta_2 \cos\Delta\alpha$$

Lo importante es elegir correctamente el triángulo esférico; existe el riesgo de pretender construir uno rectángulo, con la hipotenusa coincidente con la distancia buscada: el problema que puede pasarse por alto es que uno de los catetos, en ese caso, será un arco de paralelo celeste, que (salvo el caso especial del ecuador) no es un círculo máximo, por lo que el pretendido triángulo esférico no es tal, resultando inaplicables a él las ecuaciones deducidas en este apunte. El triángulo esférico que nos permite resolver el problema es el de la figura 6.

- 4.2.2

$$\operatorname{sen} A = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}$$

La clave consiste en observar que la condición establecida por el problema se corresponde al momento en que el círculo de altura del astro es tangente a su paralelo celeste, lo que determina un valor del ángulo paraláctico igual a 90º.

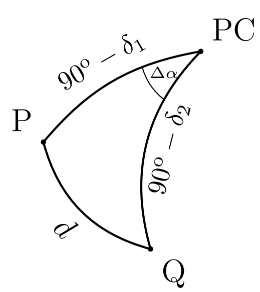

Figura 6: Problema 4.2.1

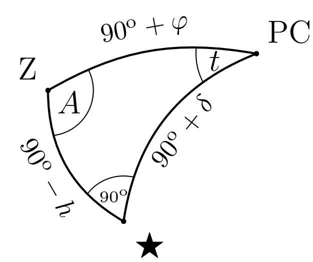

Figura 7: Problema 4.2.2

- 4.2.3

  1.

$$\operatorname{tg}\Delta\alpha = \operatorname{tg}\Delta\lambda \cos i$$

Podemos aplicar la relación (7), teniendo en cuenta que la proyección se realiza a lo largo de un meridiano celeste, que es perpendicular al ecuador celeste, por lo que queda determinado un triángulo esférico rectángulo, como se aprecia en la figura 8.

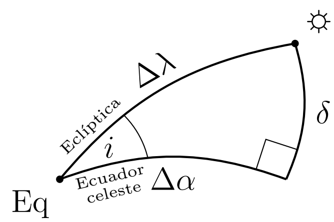

Figura 8: Proyección del recorrido solar sobre el ecuador celeste desde un equinoccio

2. $$\operatorname{sen}\Delta\alpha = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg} i}$$

   Se utiliza la ecuación (11), válida por las mismas razones del problema anterior.

- 4.2.4
  $$\cos A = -\frac{\operatorname{sen}\delta}{\cos\varphi}$$
  Sólo hay que usar la ecuación (2) con $h = 0$.

- 4.2.5
  $$\cos\frac{D}{2} = -\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}\varphi$$
  Nuevamente hay que usar la ecuación (2) con $h = 0$, teniendo en cuenta además que el ángulo buscado es el doble del ángulo horario.

A. Cálculo de la hora sidérea

Como dijéramos en la sección 4.1, para obtener la ascensión recta de un astro conociendo su ángulo horario es preciso saber la hora sidérea del lugar de observación. En este apéndice se da una receta —sin demostración— para calcularla.

A.1. Cálculo del día juliano a las 0hTU

En primer lugar, es necesario obtener el valor del día juliano para las 0hTU del día en cuestión. Sean $D\acute{I}A$, MES y $A\tilde{N}O$ los valores numéricos de la fecha (para enero, febrero, marzo, etc., los valores de MES son 1, 2, 3, etc.).

Deben realizarse los siguientes pasos preliminares:

1. Si $MES < 3$, restar 1 a $A\tilde{N}O$ y sumar 12 a MES.
2. Calcular $A = \lfloor A\tilde{N}O/100 \rfloor$[4]
3. Calcular $B = 2 - A + \lfloor A/4 \rfloor$

Finalmente, obtenemos el día juliano a las 0hTU:

$$DJ_{0hTU} = \lfloor 365,25 \cdot (A\tilde{N}O + 4716) \rfloor + \lfloor 30,6001 \cdot (MES + 1) \rfloor + D\acute{I}A + B - 1524,5$$

A.2. Cálculo de la hora sidérea local

Primero debe calcularse, para el día en cuestión:

$$T = \frac{DJ_{0hTU} - 2451545}{36525}$$

Entonces la hora sidérea en Greenwich a las 0hTU ($\theta_{G,0hTU}$) se obtiene así:

$$\begin{aligned}\theta_{G,0hTU} = 6^h 41^m 50^s, 54841 &+ 8640184^s, 812866 \cdot T \\ &+ 0^s, 093104 \cdot T^2 \\ &- 0^s, 0000062 \cdot T^3\end{aligned}$$

Para obtener la hora sidérea en Greenwich a otra hora de tiempo universal ($\theta_{G,t}$) de ese mismo día, es necesario sumarle dicha hora multiplicada por $1,00273790935$:

$$\theta_{G,t} = \theta_{G,0hTU} + 1,00273790935 \cdot \left(hora + \frac{minutos}{60} + \frac{segundos}{3600} \right)$$

[4] el operador $\lfloor x \rfloor$ devuelve la parte entera de x por truncamiento: $\lfloor 5,12 \rfloor = 5$; $\lfloor 7,99 \rfloor = 7$; $\lfloor -3,14 \rfloor = -3$.

Finalmente, para obtener la hora sidérea local en ese mismo instante (θ_s), es necesario sumar a $\theta_{G,t}$ la longitud (λ) del lugar (expresada en horas), tomada positiva al este de Greenwich y negativa al oeste:

$$\boxed{\theta_s = \theta_{G,t} + \lambda}$$

A.3. Ejemplo: cálculo de la hora sidérea local

Calculemos el valor de la hora sidérea para la ciudad de Buenos Aires ($\lambda = -58^o 29' 59" = -3^h 54^m$) el día 2 de julio de 2012, a las 13:26 hora local (16:26 TU).

1. $DÍA = 2$, $MES = 7$ y $AÑO = 2012$.
2. $MES > 2$, por lo que MES y $AÑO$ mantienen sus valores.
3. $A = \lfloor AÑO/100 \rfloor = 20$
4. $B = 2 - 20 + \lfloor 20/4 \rfloor = -13$
5. $DJ_{0hTU} = \lfloor 365,25 \cdot (2012 + 4716) \rfloor + \lfloor 30,6001 \cdot (7+1) \rfloor + 2 + (-13) - 1524,5 = 2456110,5$
6. $T = \frac{2456110,5 - 2451545}{36525} = 0,1249965776865$
7. $$\begin{aligned} \theta_{G,0hTU} &= 6^h 41^m 50^s,54841 + 8640184^s,812866 \cdot 0,1249965776865 \\ &\quad + 0^s,093104 \cdot 0,1249965776865^2 \\ &\quad - 0^s,0000062 \cdot 0,1249965776865^3 \\ &= 306^h 41^m 57^s \equiv 18^h 41^m 57^s \pmod{24} \end{aligned}$$
8. $\theta_{G,t} = 18^h 41^m 57^s + 1,00273790935 \cdot \left(16 + \frac{26}{60}\right) = 35^h 10^m 39^s \equiv 11^h 10^m 39^s$ (mód 24)
9. $\theta_{\mathbf{s}} = 11^h 10^m 39^s + -3^h 54^m = \mathbf{7^h 16^m 39^s}$

B. La trigonometría plana como caso particular de la esférica

Si tomamos sobre la esfera triángulos de lados cada vez más pequeños (sin que por eso varíen sus ángulos diedros), resulta natural pensar que iremos obteniendo triángulos cada vez más "aplanados". Otra forma de pensarlo es imaginar que la esfera adopta —en relación al triángulo de interés— un radio tan grande que en el entorno del triángulo su superficie no difiere sensiblemente de un plano[5]. En ese sentido resulta interesante intentar obtener fórmulas que sabemos válidas en el plano como casos "límite" de las fórmulas válidas en la esfera.

Si los lados de un triángulo esférico son lo suficientemente pequeños, podremos reemplazar el valor de sus senos y cosenos por las correspondientes aproximaciones según los primeros términos de sus series de Taylor[6]: $\operatorname{sen}\alpha = \alpha$ y $\cos\alpha = 1 - \alpha^2/2$. Apliquemos estas relaciones a la ecuación (2):

$$1 - \frac{a^2}{2} = \left(1 - \frac{b^2}{2}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2}\right) + bc\cos A$$

$$1 - \frac{a^2}{2} = 1 - \frac{c^2}{2} - \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2}\frac{c^2}{2} + bc\cos A$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A - \frac{b^2c^2}{2} \tag{21}$$

El lector reconocerá en (21) la famosa *fórmula del coseno* de la trigonometría plana[7].

La aplicación a la fórmula (4) es aún más directa —la *fórmula del seno*:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

Vimos en la sección 3.1 que si $A = 90^\circ$, resulta válida la ecuación (5):

[5]Resulta inevitable compartir con el lector el ejemplo que sin duda ya adivinó: un triángulo sobre la superficie terrestre, si es de pequeñas proporciones en relación con el tamaño de nuestro planeta, debe dejarse tratar tanto con las fórmulas de la trigonometría plana como con las de la esférica.

[6]Naturalmente, con los ángulos expresados en radianes.

[7]El término $-\frac{b^2c^2}{2}$ no debería distraernos demasiado, ya que al ser un infinitésimo de orden superior al resto, sería uno de los primeros "fantasmas de cantidades evanescentes" en desaparecer…

$$\cos a = \cos b \cos c$$

¿Querrá el lector obtener de ella la correspondiente y ubicua fórmula que sin duda ya anticipa?

C. Deducción vectorial de las fórmulas fundamentales

Podemos formar tres vectores con el centro de una esfera y los tres vértices de un triángulo trazado sobre la misma. Así, el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ será igual a c, el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{C}$ será igual a b, y entre $\vec{B}$ y $\vec{C}$ será a. También, el ángulo entre el plano que contiene a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y el que contiene a $\vec{A}$ y $\vec{C}$ será igual a A (lo propio puede decirse de los restantes planos respectivos).

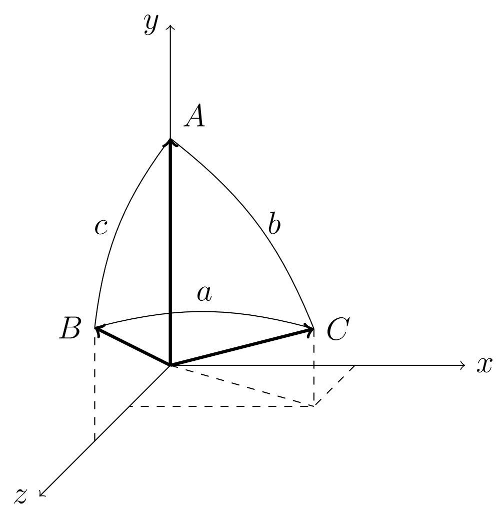

Figura 9: Triángulo esférico

De acuerdo a la figura (9), orientaremos los ejes de forma que el vector $\vec{A}$ coincida con el eje y y el vector $\vec{B}$ se halle en el plano yz (es fácil ver que esto siempre es posible). En este sistema de coordenadas (y si asumimos —sin pérdida de generalidad— que la esfera tiene radio unitario), resulta: $\vec{A} = (0, 1, 0)$, $\vec{B} = (0, \cos c, \operatorname{sen} c)$ y $\vec{C} = (\operatorname{sen} b \operatorname{sen} A, \cos b, \operatorname{sen} b \cos A)$.

Por un lado:

$$\vec{B} \cdot \vec{C} = \cos a$$

Por el otro:

$$\vec{B} \cdot \vec{C} = 0 \cdot \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A + \cos c \cdot \cos b + \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{sen} b \cos A = \cos c \cos b + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} b \cos A$$

Igualando ambos resultados:

$$\cos a = \cos c \cos b + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} b \cos A$$

que es la fórmula (2). Y las demás fórmulas pueden deducirse de ésta.

Referencias

[1] Bakulin, Kononovich, Moroz, *Curso de astronomía general*, MIR, Moscú, 1987.

[2] Vorontsov, Veliamínov, *Problemas y ejercicios prácticos de astronomía*, Mir, Moscú, 1979.

[3] Asín, *Astronomía*, Paraninfo, Madrid, 1990.

[4] Meeus, *Astronomical Algorithms*, Willmann–Bell, Richmond, 1991.

[5] Todhunter, I., *Spherical Trigonometry*, MacMillan, Londres, 1886.